# El Problema de Transporte

## Naturaleza, Historia y Formulación Matemática

Investigación de Operaciones

26 de octubre de 2026

# Contenido de la Sesión


1. ¿Qué es el Problema de Transporte?
2. Antecedentes Históricos
3. Estructura del Problema
4. Modelación Matemática Paso a Paso
5. Aplicaciones Industriales
6. Siguiente Paso
7. Fundamentos Teóricos: Método MODI
8. Método de Aproximación de Vogel (VAM)

# ¿Qué es el Problema de Transporte?

## Definición General

Es un caso especial de la **Programación Lineal** cuyo objetivo es determinar el plan de distribución óptimo para enviar un producto desde un conjunto de **orígenes** (fuentes de oferta) hacia un conjunto de **destinos** (puntos de demanda), minimizando el costo total de transporte.

## Características Principales

- Estructura de **Red Bipartita**.
- Unidades homogéneas de producto.
- Costo proporcional a la cantidad enviada.

## Propiedad de Entereza

Si las ofertas y demandas son números enteros, las variables de decisión $x_{ij}$ en la solución óptima serán automáticamente **números enteros**.

# Evolución Histórica del Modelo

1781 – Gaspard Monge: Planteó por primera vez el problema continuo de mover tierra para construcciones con el menor esfuerzo posible (*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*).

1941 – Frank L. Hitchcock: Formuló la versión analítica y discreta clásica del transporte de productos desde múltiples fuentes a múltiples destinos.

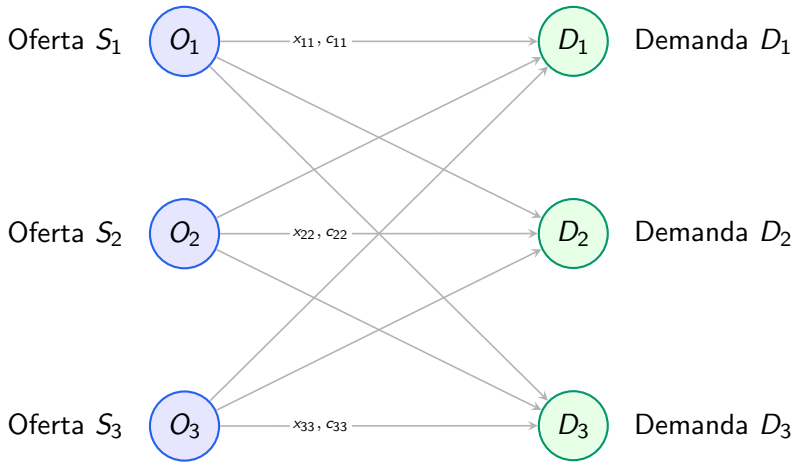
1942 – Leonid Kantorovich: Desarrolló independientemente la teoría de optimización de transporte aplicada a la planificación económica en la URSS.

1947 – Tjalling C. Koopmans: Integró el análisis de transporte a la teoría económica y logística comercial.

## Premio Nobel de Economía (1975)

Kantorovich y Koopmans recibieron el Premio Nobel por sus contribuciones a la **teoría de la asignación óptima de recursos**.

# Componentes de la Red de Transporte



# Paso 1: Variables de Decisión

Para definir las decisiones cuantitativas del sistema, identificamos el flujo que se enviará a través de cada arco o ruta de la red.

## Definición de la Variable

$$x_{ij} = \text{Número de unidades a enviar desde el origen } i \text{ hacia el destino } j$$

- $i = 1, 2, \ldots, m$ (Índice para los orígenes / fuentes de oferta)
- $j = 1, 2, \ldots, n$ (Índice para los destinos / puntos de demanda)
- En total se definen $m \times n$ variables de decisión.

# Paso 2: Función Objetivo

Buscamos **minimizar el costo total** acumulado de envío de todo el sistema logístico.

## Función Objetivo de Minimización

$$\text{mín } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- $c_{ij}$: Costo unitario de transporte desde el origen $i$ hacia el destino $j$.
- $x_{ij}$: Cantidad de unidades a transportar desde el origen $i$ hacia el destino $j$.
- $c_{ij} \cdot x_{ij}$: Costo total generado en la ruta $(i, j)$.

# Paso 3: Restricciones del Sistema

## 1. Restricciones de Oferta

La suma de los envíos desde el origen $i$ no puede superar su capacidad $S_i$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq S_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

## 2. Restricciones de Demanda

La suma de los envíos recibidos por el destino $j$ debe satisfacer su requerimiento $D_j$:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

## 3. Restricción de No Negatividad

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{y} \quad j = 1, \ldots, n$$

# Modelo Matemático Canónico (Balanceado)

Un problema de transporte se considera **balanceado** cuando la oferta total es exactamente igual a la demanda total:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

## Formulación Canónica Completa

$$\text{mín} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{(Igualdad de Oferta)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad \text{(Igualdad de Demanda)} \qquad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

# Aplicaciones en el Mundo Real

## Logística y Cadenas de Suministro

Envío de productos terminados desde plantas de manufactura hacia centros de distribución o tiendas minoristas.

## Programación de Personal

Asignación óptima de empleados o cuadrillas desde bases operativas hacia turnos o proyectos.

## Sistemas Energéticos

Despacho de energía eléctrica desde centrales generadoras hacia subestaciones urbanas.

## Gestión de Recursos Hídricos

Distribución de agua potable desde represas y plantas hacia redes de consumo urbano e irrigación.

# Transición a Algoritmos de Solución

**¿Cómo resolvemos este modelo?**

## Fase 1: Solución Básica Factible (SBFI)

- Método de la Esquina Noroeste
- Método del Costo Mínimo
- Método de Aproximación de Vogel (VAM)

## Fase 2: Prueba de Optimalidad

- Método MODI (Multiplicadores $u_i, v_j$)
- Método del Salto de Mata (Stepping-Stone)

# 1. Fundamentos Teóricos del Método VAM

## ¿Qué es el Método de Vogel?

Es un método heurístico de la **Fase 1** diseñado para obtener una Solución Básica Factible Inicial (SBFI). Evalúa la matriz de costos para minimizar el impacto de tomar decisiones logísticas no óptimas.

## Cálculo de la Penalización

Para cada fila y columna activa se calcula la diferencia absoluta entre sus dos costos unitarios más bajos:

$$\text{Penalización} = |c_{\text{segundo menor}} - c_{\text{menor}}|$$

## Interpretación Económica

La penalización cuantifica el **costo de oportunidad** o penalización económica en la que incurre el sistema si se pierde la ruta más económica de esa fila o columna.

# 2. Reglas de Desempaque y Casos Especiales

## Resolución de Empates en Penalizaciones

Si dos o más filas o columnas comparten el valor de penalización más alto:

1. Se comparan las casillas activas pertenecientes a las líneas empatadas.
2. Se selecciona la línea que contenga la celda con el **menor costo unitario** ($c_{ij}$).
3. Si los costos mínimos también son iguales, la elección se hace de forma arbitraria.

## Agotamiento Simultáneo (Prevención de Degeneración)

Si al asignar $x_{ij} = \min(S_i, D_j)$ se agotan simultáneamente la oferta $S_i = 0$ y la demanda $D_j = 0$:

- Se tacha **únicamente la fila** (o la columna), pero jamás ambas al mismo tiempo.
- La línea que permanece sin tachar mantiene una capacidad de cero (0) para forzar la asignación de una variable básica nula ($x_{k,j} = 0$) y cumplir la condición $m + n - 1$.

# 3. Planteamiento del Problema de Transporte

Se considera el sistema de distribución de la empresa **TechShip** con 3 plantas ($P_1, P_2, P_3$) y 3 centros de consumo ($C_1, C_2, C_3$).

| **Planta \ Centro** | **Centro 1 ($C_1$)** | **Centro 2 ($C_2$)** | **Centro 3 ($C_3$)** | **Oferta ($S_i$)** |
|---|---|---|---|---|
| **Planta 1 ($P_1$)** | (8) | (5) | (6) | **120** |
| **Planta 2 ($P_2$)** | (15) | (10) | (12) | **80** |
| **Planta 3 ($P_3$)** | (3) | (9) | (10) | **100** |
| **Demanda ($D_j$)** | **150** | **90** | **60** | **300** |

## Comprobación de Balance

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = 120 + 80 + 100 = \mathbf{300} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} D_j = 150 + 90 + 60 = \mathbf{300}$$

El sistema se encuentra totalmente **balanceado**.

# Iteración 1: Cálculo de Penalizaciones

## Penalizaciones por Fila ($P_F$)

- **Fila** $P_1$**:** Menores son 5 y 6.

$$P_{F1} = |6 - 5| = \mathbf{1}$$

- **Fila** $P_2$**:** Menores son 10 y 12.

$$P_{F2} = |12 - 10| = \mathbf{2}$$

- **Fila** $P_3$**:** Menores son 3 y 9.

$$P_{F3} = |9 - 3| = \mathbf{6}$$

## Penalizaciones por Columna ($P_C$)

- **Columna** $C_1$**:** Menores son 3 y 8.

$$P_{C1} = |8 - 3| = \mathbf{5}$$

- **Columna** $C_2$**:** Menores son 5 y 9.

$$P_{C2} = |9 - 5| = \mathbf{4}$$

- **Columna** $C_3$**:** Menores son 6 y 10.

$$P_{C3} = |10 - 6| = \mathbf{4}$$

## Criterio de Selección

Máxima Penalización $= \text{máx}(1, 2, \mathbf{6}, 5, 4, 4) = \mathbf{6}$ Se selecciona la **Fila** $P_3$ para realizar la primera asignación.

# Iteración 1: Asignación y Actualización de Saldos

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | **Oferta** | $P_F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | (8) | (5) | (6) | 120 | 1 |
| $P_2$ | (15) | (10) | (12) | 80 | 2 |
| $P_3$ | **100** (3) | (9) | (10) | **0** | **6** $\leftarrow$ |
| **Dem.** | **50** | 90 | 60 | **200** | |
| $P_C$ | 5 | 4 | 4 | | |

## Operaciones

1. En la fila $P_3$, el menor costo unitario es $c_{31} = 3$.
2. Asignación:

$$x_{31} = \text{mín}(100, 150) = \mathbf{100}$$

3. Oferta de $P_3$:

$$100 - 100 = \mathbf{0} \quad \text{(Fila tachada)}$$

4. Demanda de $C_1$:

$$150 - 100 = \mathbf{50} \quad \text{(Pendiente)}$$

# Iteración 2: Recálculo sin Fila $P_3$

Se evalúan únicamente las celdas activas en las filas $P_1$ y $P_2$:

## Penalizaciones por Fila ($P_F$)

- **Fila** $P_1$**:** Costos activos $\{8, 5, 6\}$.

$$P_{F1} = |6 - 5| = \mathbf{1}$$

- **Fila** $P_2$**:** Costos activos $\{15, 10, 12\}$.

$$P_{F2} = |12 - 10| = \mathbf{2}$$

## Criterio de Selección

Máxima Penalización $= \max(1, 2, \mathbf{7}, 5, 6) = \mathbf{7}$
Se selecciona la **Columna** $C_1$ para la siguiente asignación.

## Penalizaciones por Columna ($P_C$)

- **Columna** $C_1$**:** Costos activos $\{8, 15\}$.

$$P_{C1} = |15 - 8| = \mathbf{7}$$

- **Columna** $C_2$**:** Costos activos $\{5, 10\}$.

$$P_{C2} = |10 - 5| = \mathbf{5}$$

- **Columna** $C_3$**:** Costos activos $\{6, 12\}$.

$$P_{C3} = |12 - 6| = \mathbf{6}$$

# Iteración 2: Asignación y Actualización de Saldos

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | **Oferta** | $P_F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | **50** (8) | (5) | (6) | **70** | 1 |
| $P_2$ | (15) | (10) | (12) | 80 | 2 |
| $P_3$ | **100** (3) | — | — | **0** | X |
| **Dem.** | **0** | 90 | 60 | **150** | |
| $P_C$ | **7** ↑ | 5 | 6 | | |

## Operaciones

1. En la columna $C_1$, el menor costo activo es $c_{11} = 8$.
2. Asignación:

$$x_{11} = \text{mín}(120, 50) = \mathbf{50}$$

3. Demanda de $C_1$:

$$50 - 50 = \mathbf{0} \quad \text{(Columna tachada)}$$

4. Oferta de $P_1$:

$$120 - 50 = \mathbf{70} \quad \text{(Pendiente)}$$

# Iteración 3: Recálculo en Matriz Reducida ($2 \times 2$)

Se evalúan las celdas restantes omitiendo la fila $P_3$ y la columna $C_1$:

## Penalizaciones por Fila ($P_F$)

- **Fila $P_1$:** Costos activos $\{5, 6\}$.

$$P_{F1} = |6 - 5| = \mathbf{1}$$

- **Fila $P_2$:** Costos activos $\{10, 12\}$.

$$P_{F2} = |12 - 10| = \mathbf{2}$$

## Penalizaciones por Columna ($P_C$)

- **Columna $C_2$:** Costos activos $\{5, 10\}$.

$$P_{C2} = |10 - 5| = \mathbf{5}$$

- **Columna $C_3$:** Costos activos $\{6, 12\}$.

$$P_{C3} = |12 - 6| = \mathbf{6}$$

## Criterio de Selección

$$\text{Máxima Penalización} = \text{máx}(1, 2, 5, \mathbf{6}) = \mathbf{6}$$

Se selecciona la **Columna** $C_3$ para la siguiente asignación.

# Iteración 3: Asignación y Actualización de Saldos

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | **Oferta** | $P_F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | **50** (8) | (5) | **60** (6) | **10** | 1 |
| $P_2$ | — | (10) | (12) | 80 | 2 |
| $P_3$ | **100** (3) | — | — | **0** | X |
| **Dem.** | **0** | 90 | **0** | **90** | |
| $P_C$ | X | 5 | **6** ↑ | | |

## Operaciones

1. En la columna $C_3$, el menor costo activo es $c_{13} = 6$.
2. Asignación:

$$x_{13} = \text{mín}(70, 60) = \mathbf{60}$$

3. Demanda de $C_3$:

$$60 - 60 = \mathbf{0} \quad \text{(Columna tachada)}$$

4. Oferta de $P_1$:

$$70 - 60 = \mathbf{10} \quad \text{(Pendiente)}$$

# Paso Terminal: Asignación Directa por Línea Única

## Condición de Parada Alcanzada

Al quedar únicamente activa la **Columna** $C_2$ (con demanda de 90 unidades), las penalizaciones se omiten y las asignaciones se efectúan directamente.

### 1. Asignación a la Fila $P_1$

- Oferta remanente en $P_1 = 10$.
- $x_{12} = \text{mín}(10, 90) = \mathbf{10}$.
- Demanda pendiente $C_2$: $90 - 10 = \mathbf{80}$.

### 2. Asignación a la Fila $P_2$

- Oferta remanente en $P_2 = 80$.
- $x_{22} = \text{mín}(80, 80) = \mathbf{80}$.
- Demanda pendiente $C_2$: $80 - 80 = \mathbf{0}$.

# Solución Básica Factible Inicial (SBFI) Final

| Planta \ Centro | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 | Oferta |
|---|---|---|---|---|
| **Planta 1** | **50** (8) | **10** (5) | **60** (6) | **120** |
| **Planta 2** | — (15) | **80** (10) | — (12) | **80** |
| **Planta 3** | **100** (3) | — (9) | — (10) | **100** |
| **Demanda** | **150** | **90** | **60** | **300** |

## Cálculo del Costo Total ($Z_{\text{Vogel}}$)

$$Z = (50 \cdot 8) + (10 \cdot 5) + (60 \cdot 6) + (80 \cdot 10) + (100 \cdot 3)$$

$$Z = 400 + 50 + 360 + 800 + 300 = \$\mathbf{1,910}\ \text{USD}$$

## Comprobación de No Degeneración

Variables Básicas $= m + n - 1$

$3 + 3 - 1 = \mathbf{5}$ celdas

Celdas asignadas: 5 $\Longrightarrow$ **Solución No Degenerada**.